

# JOHDANTO

---

Luulin 37 vuotta, etteivät ihmiset pidä matematiikasta. Tein väitöskirjani matematiikan opetuksen mielekkyydestä. Kiersin luennoimassa matematiikkaan liittyvien asenteiden dramaattisesta laskusta kouluvuosien aikana. Rohkaisin lisäämään matematiikan opetukseen elementtejä, jotka korjaisivat ongelmaa.

Olin niin väärässä.

Ihmisen mieli nimittäin toimii niin, että se osaa pitää erillään keskenään ristiriitaisia asioita. Samaan aikaan, kun olen kantanut huolta yleisestä vastenmielisyydestä matematiikkaa kohtaan, olen opettanut kurssikaudella oppilaita, jotka suorastaan janoavat matematiikkaa. Kurssien alussa käsittelemme tavallisesti osallistujien matematiikkakokemuksia, jotka eivät aina ole olleet pelkästään miellyttäviä mutta jotka ovat sisältäneet myös ajoittaisia hyvän olon filiksiä. Olen saanut kokea uudelleen ja uudelleen, kuinka pienen virittäytymisen jälkeen nousee innostus matematiikan hauskuudesta. Ajattelua, logiikkaa, onnistumisen kokemuksia. Vuosien kuluessa olen päässyt todistamaan, miten pysyviä muutoksia matikkainnostuksen syytyminen voi saada aikaan. Eräskin matikasta ahdistuneena opinnot aloittanut nuori aikuinen oppi matikkaa, sai korkeakoulupaikan, valmistui ja alkoi tehdä väitöskirjaa valitun aiheekseen korkean tason tilastomatematiikan hyödyntämisen omalla alallaan. Oi-

keastaan kaikki, jotka ovat päässeet kiinni jutun juonesta, ovat alkaneet tehdä tilaa matematiikalle elämässään. Miksi? Koska matematiikka *on hyvää*.

Matematiikka ei ole tylsää, eikä siitä tarvitse väkisin yrittää tehdä mielekkäämpää – se on mielekästä jo valmiiksi. Mutta matematiikka tarjoillaan kouluissa usein niin kuivana pullana, että sitä vähintään yhdeksän vuotta jäystettyään alkaa uskoa joskus niin ihanalta tuntuneiden pohdintojen ja aivojen venyttämisten olleen liian hyvää ollakseen totta. Hyväksyy ajatuksen, että abstrakti pinnistely ja hyvää oloa tuottava asioiden lokahtelu eivät mahtuneetkaan tähän elämään. Luopuu osasta inhimillisiä perustarpeita ajatellen, että eihän kaikkea voikaan saada.

Ankealle tarjoilulle altistunut ihminen oppii yhdistämään matematiikan terveelliseen mutta mauttomaan ruokavalioon, josta ei nauti. Matematiikalle käy kuin vegaaniravinnolle: kuulostaa kunnolliselta, mutta onkohan normaaliyksilöltä pikkaisen liikaa vaadittu. Ruoka on taatusti niin pahanmakuista, että siitä jää vajarit. Mutta kuten kasvisruokavaliossa myös matematiikassa on lukemattomia sävyjä ja ulottuvuuksia. Kun eltaantuneen polynomisoseen tai kuivien kertotaululaatikoiden sijaan saa kerrankin eteensä viidestätoista eri ainesosasta koostuvan, tuoreutta tihkuvan annoksen, joka tuottaa samanaikaisesti käsittämättömän ajatteluelämyksen, ikuisuuksia jatkuvan onnistumisen tunteen ja loputtoman terävän olotilan, muistaa, että tätähän sitä aina halusi. Koko ajan on ollut nälkä.

Ja nyt, nyt on saatava lisää.

# Testi: Puutostilan diagnosointi

## I. Koostuiko oma matematiikan maistelusi

- a) kuivuneen leivän jauhamisesta opettajan ohjaamana
- b) tuoreen taikinan leipomisesta ja maistelusta keskustellen ja muita auttaen
- c) herkullisempien eväiden kaipaamisesta muiden kanssa pulisten
- d) mauttomuuteen turtumisesta
- e) syntisistä makuelämyksistä
- f) ristiriitaisista aistimuksista?

➔ Kirjan luvusta Fiilikset (s. 23) selviää, kuinka suurella osalla tämän päivän koululaisista on kansasi sama kokemus.

## F. Tiedätkö, kuka tietää, kuinka monta metriä aitaa tarvitaan tontin ympäröimiseen?

➔ Käy lukemassa ihastuttava kollektiivinen pohdinta osoitteesta [www.feissarimokat.com/2016/07/muutamaa-metri-aitaa/](http://www.feissarimokat.com/2016/07/muutamaa-metri-aitaa/).

Riippuuko vastaus tontin muodosta?

## K. Kuka lapsista valehtelee?

Isosisko: ”Äiti luki iltasadun ja sanoi menevänsä vielä ripustamaan pyykit.”

Pikkusisko: ”Äiti luki iltasadun ja sanoi menevänsä vielä isän kanssa juttelemaan.”

Pikkuveli: ”Isä luki iltasadun ja sanoi menevänsä vielä auttamaan äitiä pyykeissä.”

➔ Vastausta voit yrittää etsiskellä kirjan luvusta Fiilikset (s. 23).

Arvioi puutostilaasi makustelemalla, millaisia ajatuksia ja tunteita testin kysymykset sinussa herättävät.

## Ruokahalun herääminen

Aivot elelevät omaa elämäänsä, emmekä vaikuta niiden aatoksiin läheskään niin paljoa kuin varmaankin toivoisimme. Huomasitko, miten edellisen sivun pikku testi oli aakkostettu? Jos huomasit, jäi aakkostus ehkä vaivaamaan, mutta unohdit asian saman tien. Jos et huomannut, eikö nyt tekisikin mieli selata sivu taaksepäin ja käydä kurkistamassa? Kuinka monen lukijan aivot automaattisesti olettivat aakkostuksen olevan A, B ja C? Jos ei ollut mitään syytä olettaa, että aakkostus olisi jontenkin poikkeuksellinen, aivot kääntyivät autopilotille, säästivät vaivaa ja lähtivät suoraan siitä oletuksesta, että aakkosten valinnassa ei ollut mitään huomioitavaa. Aivot tekivät, minkä parhaaksi näkivät.

Mikä valitulle aakkostukselle oli syynä? Oliko jossakin koira hauhattuna? Vai jääkiekkojoukkue? Testin aakkostus kertoo siitä, miten moniulotteisella tavalla asioihin on mahdollista ujuttaa matematiikkaa. Eräs opettaja käytti vastaavaa aakkostusta piirtäessään taululle kolmion oppilaiden tarkasteltavaksi. Kolmion kulmat nimetään yleensä kirjaimin (vastapäivään), ja tavallisimmin käytössä ovat A, B ja C. Tämä opettaja olikin käyttänyt kirjaimia I, F ja K. Toisin kuin tämän kirjan testin aakkostuksessa, opettajan käyttämät kirjaimet olivat niin näkyvillä, ettei niihin voinut olla kiinnittämättä huomiota. Koska ne poikkesivat tavallisesta, oppilaat väistämättä havahtuivat. Aivot pelaavat todennäköisyyksillä: jos jokin on liian epätodennäköistä, se joko sivuutetaan tai siihen kohdistetaan poikkeuksellinen huomio. Kolmion tapauksessa tapahtui jälkimmäinen. Lisäksi osa oppilaista assosioi asian jääkiekkoon, mikä sai aivot entistä virittyneemmäksi. Miten juttu liittyyisi kyseessä olevaan joukkueeseen?

Herättelyn lisäksi valittujen kirjaimien avulla oppilaita autettiin ymmärtämään matematiikkaa. On nimittäin täysin yhdentekevää, millä

kirjaimilla kolmion kulmat nimetään. Kulmat nimetään, jotta niiden käsittely olisi helpompaa. Kirjaimissa itsessään ei ole mitään erityisominaisuuksia matematiikan kannalta. Ne ovat vain joukon *aakkoset* jäseniä, joista mitä tahansa sopii käyttää. Aakkostuksen valinnalla opettaja sai oppilaat ymmärtämään, että vakiintuneet käytänteet eivät ole kaikkitietävän opettajan hallussa olevaa ulkoa opiskeltavaa asiaa. Ne ovat osa matemaattista toimintamallia, johon kuuluu yhteyksien luominen (tietty nurkka = I) sekä asioiden yksinkertaistaminen aina, kun se on mahdollista (pidättäydytään puhumasta tietystä nurkasta, kun on helpompaa puhua I:stä). Kolmion kulmien nimeämisellä opettaja onnistui saamaan oppilaiden aivot hereille, ja teki sen varsin keveällä tavalla. Kovin suuria näiden huomiointien ei tarvitse ollakaan, sillä matematiikan herkullisuus lisääntyy yllättävän pienillä muutoksilla.

Tutkijat Suzanne Hidi ja K. Ann Renninger<sup>1</sup> ovat luoneet nelivaiheisen mallin siitä, kuinka ihmisen kiinnostus oppimisessa herää ja pysyy yllä. Alkuun riittää *tilannekohtainen kiinnostuksen sytyttäminen*. Kiinnostuksen sytyttämiseen voi käyttää lähes rajatonta keinovalikoimaa: yllättämistä, hauskuuttamista, haasteen antamista, salaperäisyyttä... Herännyt kiinnostus *pysyy tilanteessa yllä*, jos aktiviteetti on sitouttava ja tuottaa uutta reflektoitavaa, siis jotain uutta pureskeltavaa tai uuden johtolangan sopivin väliajoin. Nämä kaksi ensimmäistä vaihetta ovat toteutettavissa matematiikan parissa juuri aloittavan, sitä jatkuvasti harjoitelleen sekä sitä jo karttamaan oppineen oppilaan kanssa. Seuraavat vaiheet ovat seurausta edellisten vaiheiden onnistumisesta. Kun kiinnostus on herännyt ja pysynyt yllä useita kertoja, alkaa hiljalleen kehittyä *orastava henkilökohtainen kiinnostus*. Parhaimmillaan tästä muodostuu ajan myötä *pitkälle kehittynyt henkilökohtainen kiinnostus*, jonka jälkeen

---

1 Suzanne Hidi & K. Ann Renninger: The four-phase model of interest development. (Educational Psychologist, 2/2016).

kiinnostuksen kohteen, olkoon se vaikka matematiikka, on enää vaikea muuttua oppilaan silmissä täysin vastenmieliseksi.

Matematiikan opettajana mietin itse ennen kaikkea kiinnostusta ylläpitäviä tehtäviä sekä kiinnostuksen herättäjiä. Muu seuraa itsestään: kun oppilaan henkilökohtainen kiinnostus on lähtenyt kehittymään, alkaa riittää, että opettaja on hänelle käytettävissä.

Mutta miten löytää kiinnostuksen herättäviä tehtäviä tai toimintatapoja ja vangita oppilaiden huomio? Itse etsin innoitusta usein matematiikan ulkopuolelta. Miten taikuri aloittaa esityksensä? Entä miljoonia katsojia kerännyt TED-puhuja?<sup>2</sup> Miten kierroksia nostetaan ennen loppuratkaisua bestseller-romaanissa? Kuten aiemmin totesin, kiinnostusta herättävien muutosten ei tarvitse olla suuria. Väitöskirjani vastaväittäjä, Kanadassa työskentelevä professori Peter Liljedahl kertoi tullessaan kutsutuksi Aasiaan hyvin perinteiseen opettajatapahtumaan. Hänen piti muovata lyhyessä ajassa opettajien käsitystä ajatuksesta, että ainoastaan opettajajohtoinen toistoon perustuva opetus toimii. Kun Peterin tuli aika aloittaa puheensa, hän teki sen aloittaen puheensa salin perältä. Puhuja ei ollutkaan katsojien edessä lavalla tavanomaisella paikallaan johtamassa. Peter, joka muutenkin on mainio kyseenalaistaja ja aina mielenkiinnon kattoon asti nostava puhuja, sai sekunnissa jokaisen kuulijan kiinnostuksen ohjautumaan hänen sanomansa suuntaan.

Kiinnostuksen herättyä tarvitaan moniulotteisia tehtäviä, jotka haastavat monella tasolla ja onnistuvat kiinnostuksen ylläpitämisessä. Niitä löydän parhaiten matematiikan ammattilaisten (kollegoiden, oppimateriaalituottajien, matematiikka-aktiivien) tekemisiä seuraamalla. Käy-

---

2 TED on lyhenne sanoista Technology, Entertainment ja Design. TED on alun perin konferenssi, ja sen nimellä tuotetaan tuhansittain ajatuksia herättäviä puheita jatkuvasti. Kirjassa myöhemmin esitellyt Bridge riddle- sekä Can you solve the hat riddle -ongelmat ovat osa TEDin koulutuskäyttöön (TED-Ed) tuottamaa kiehtovasti toteutettujen matemaattisten ongelmien sarjaa.

tän sosiaalista mediaa, verkostojani ja hyödynnän materiaalipankkeja. Käänän myös usein etsintätöiden oppilaiden tehtäväksi. Joukkovoimalla löydämme enemmän, yhdessä voimme seuloa hyvät tehtävät huonommin toimivista ja löydöksiä voidaan hyödyntää ristiin (yhden ryhmän hyväksi tunnistamat tehtävät annetaan ratkaistavaksi rinnakkaisryhmälle ja toisinpäin). Samalla tulemme käsitelleeksi tehtävien sisältämään matematiikkaan liittyvää oppimisprosessia.

Tässä kirjassa kiinnostuksen herättämisen ideana on herkullinen tarjoilu. Kiinnostuksen ylläpitämiseksi myös ravinteikkaus on otettava huomioon. Kirja koostuu teemaluvuista, joissa matematiikkaa ja sen opiskelua käsitellään eri näkökulmista käsin. Lukija saa maistaa fuusiokeittiöissä kokattua matematiikkaa, jossa matemaattiset sisällöt joutuvat jatkuvaan vuoropuheluun muun maailman kanssa.

Jokaisessa luvussa annetaan konkreettisia ehdotuksia tavoista työskennellä oppilaiden kanssa. Annettuihin tehtäviin kannattaa suhtautua joustavasti. Niitä ei tarvitse toteuttaa pilkulleen ohjeistuksen mukaan, vaan tavoitteena on kaikki se prosessointi, joka käynnistyy opettajan tarjoillessa tehtäviä ryhmälleen yhteisesti työstettäväksi. Vastauksen ei aina tarvitse olla se, mitä odotettiin. Tärkeintä on, onko vastaus looginen seuraus siitä lähtötilanteesta, josta kulloinkin päädytään aloittamaan.<sup>3</sup> Aina ei ole myöskään selvää, millainen ohjeistus tai työskentelyn taso sopii parhaiten minkäkin ikäiselle. Tehtävissä on annettu vinkkejä, miten työskennellä

---

3 Esimerkiksi tässä kirjassa myöhemmin (s. 39) esitetyssä tehtävässä kysytään, kuinka monta viikkoa sisaruksista nuorimmalla on eniten rahaa. Tarkkaan ottaen kysytään siis sitä viikkomäärää, mikä on syntymäpäivänä saadun rahan ja vanhimman sisaruksen voitolle pääsyn välissä. Jotkut oppilaat kuitenkin lähtevät liikkeelle nolatilanteesta, eli siitä, missä kohtaa syntymäpäiviin on vielä aikaa. Vastaus on tietenkin tällöin eri, muttei sinänsä väärä, vaan vastaa eri kysymykseen. On olennaisen tärkeää tuoda esiin oppilaille, mihin asiaan heidän ajattelunsa kohdistuu ja että se on oikein toisesta lähtökohdasta käsin sen sijaan, että eri asiaan vastaaminen kuitataan kokonaisvaltaisesti vääräksi. Oppilaiden kanssa on syytä käsitellä sitä, mikä on absoluuttisesti oikea vastaus mihinkin kysymykseen, mutta ennen kaikkea sitä, millainen matemaattinen ajattelu tuottaa oikeita johtopäätöksiä missäkin tilanteessa.

yksinkertaisemmin, miten syvällisemmin. Syvemmälle sukeltaminen on parhaimmillaan oppilaasta lähtevää, oman kiinnostuksen ohjaamaa. Ei siis kannata miettiä liian tarkkaan, minkä tasoinen työskentely on optimaalisin ala- ja mikä yläkouluikäiselle, tai ylipäättään pohtia asioita liiaksi iän tai arvioidun tason perusteella. Välillä on hyvä kokonaan unohtaa oppilaille ajatellut tasoerotukset ja antaa hitaammin edistyneiden sekä aina nopeasti kirjan tehtäviä tekevien edetä monipuolisten tehtävien parissa kiirehtimättä ja vailla liikoja ennakko-oletuksia.

Kirjassa esiteltyjen tehtävien avulla opetusta voi muhevoittaa esimerkiksi lyhyellä alkuherätyksellä tai aloittamalla oppitunnin aihe jollakin kiinnostusta nostavalla orientaatiolla. Vaihtoehtoisesti koko oppitunti voi olla kiinnostuksen sytyttävä ja sitä ylläpitävä isompi kokonaisuus. Opetusta voi herkullistaa myös tarjoilemalla lopuksi jotakin matemaattisesti makeaa, joka jättää suuhun hyvän maun. Myös kotitehtävinä voidaan tarjoilla sellaisia makupaloja, että oppilas on kotona pelkästään onnellinen, että jotakin jäi vielä suuhun pantavaksi. Kirjan luvuissa tarjoillaan siis kuhunkin teemaan liittyen seuraavia osioita:

- *Pikkunälkään*, virkistävä oppimisidea, joka voidaan toteuttaa oppitunnin alussa, lopussa tai keskellä kiinnostuksen herättämiseksi. Pikkunälkään ylläpitää ruokahalua, eikä sen tarvitse aina liittyä suoraan tulevan oppitunnin aiheeseen.
- *Alkupalat*, oppimisidea, jolla myös voidaan aloittaa oppitunti mutta joka suoremmin vie jo vatsan täyttämiseen. Alkupalan tarkoitus on orientoida tunnin muuhun sisältöön.
- *Pääruoka*, oppimisaktiviteetti, johon voi kuluttaa koko oppitunnin. Jotkut pääruuat vaativat tätäkin enemmän pureskelua ja ovat näin pidempiä projekteja.
- *Jälkkäri*, lopputunnin herkkutuokio joka Pikkunälkään-aktiviteetin tapaan voi olla erillinen tunnin aiheesta mutta takaa oppilaille hyvän fiiliksen tunnilta lähdettäessä.



- *Doggy bag*, kotona tehtävä oppiminen, joka helpottaa nälkää vielä seuraavanakin päivänä.

Aktiviteetteja ei ole tarkoitus teettää peräkkäin samalla oppitunnilla. Riittää, että tarjoilee matematiikkaa maukkaana riittävän usein. Esimerkiksi kerran viikossa voisi tarjoilla alkupalan, kerran kuukaudessa pääruuan, aina perjantaisin jälkkäriä... Vastaavia aktiviteetteja alkaa keksiä helposti itse, kun ajatukseen tottuu.

Viimeisenä huomiona ennen varsinaisten kappaleiden alkua selvennettäköön asia, johon oppimisen mielekkyyden puolestapuhujat törmäävät liian usein: mielekkyyden sekoittaminen puhtaaseen viihteeseen. Tässä kirjassa tavoitteena on parantaa matematiikan opetusta, ei huonontaa sitä. Ei siis haeta oppimista, joka olisi pelkkää pinnallista hauskanpitoa. Oppiminen vaatii niin sanotulla lähikehityksen vyöhykkeellä oloa. Pelkkä hauska ja mukava ei ole lähikehityksen vyöhykkeillä vaan mukavuusalueella eikä tietenkään takaa optimaalista haastetta, sellaista, joka johtaisi oppimiseen ja sinnikkyiden kasvamiseen. Kun puhun matematiikan opetuksen mielekkyydestä, en siis puhu työntekoa vastaan. Optimaalisella kehitysvyöhykkeellä ei kuitenkaan olla silloinkaan, jos työskentely on liian kaukana senhetkisistä voimavaroista. Sellaista tapahtuu matematiikan opetuksen ollessa liian vaikeaa, etäännyttävää, tylsää tai merkityksetöntä. Kun puhun matematiikan opetuksen mielekkyydestä, puhun siis työntöon puolesta. Puhun siitä, mitä tulee tehdä, jotta oppilaan olisi helpompaa siirtyä mukavasta matematiikan välttelytilasta kehitystä tarjoavalle vyöhykkeelle.

Tässä kirjassa tarjoillaan aivoille monentasoisia matemaattisia haasteita, joiden avulla huomioidaan niin ajattelun syveneminen kuin pänttäämällä tapahtuva ajattelun vahvistuminen. Tarkoitus on kokonaisvaltaista. Mielekkyyks ja työnteko eivät koskaan ole olleet asioita, joiden täytyisi sulkea toisensa pois. Jos jollakulla tällainen ajatus on takaraivossa, nyt on hyvä aika pohtia, mistä moinen liero on ajatuksiin luikerrellut.